TASSI EQUIVALENTI

Spesso capita che i tassi si riferiscono a periodicità diversa di come è espresso il tempo e viceversa, si ricorre quindi alla seguente definizione:

Due tassi sono equivalenti **se applicati allo stesso capitale e per lo stesso periodo di tempo producono lo stesso montante o valore attuale**, ovviamente è cambiato il modo di computare il tempo.

1.6.1 CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE

Il montante per C = 1 è:

$$(1 + i) = (1 + i_k\, k)$$

Se è noto il tasso periodale i_k:

$$i = i_k\, k$$

Se è noto il tasso annuale i:

$$i_k = i /k$$

Per passare da periodale a periodale si ha.

$$i_k\, k = i_s\, s$$

da cui:

$$i_k = i_s\, s/ k$$

questa è chiamata relazione tra tassi infrannuali nel regime semplice ed esprimo che i tassi sono correlazioni proporzionali al tempo.

Esempio
Dato $i_4 = 0.03$ il tasso mensile è?

$$i_{12} = i_4\, 4/12 = 0.03\ 1/3 = 0.01 =1\%$$

Si noti che dalla formula dei tassi equivalente si ottengono le relazioni precedenti(per k=1 il frazionamento è l'anno).

CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

Il montante per C = 1 e t =1 è:

$$(1 + i) = (1 + i_k)^k$$

Il tasso annuo noto quello periodale è:

$$i = (1 + i_k)^k -1$$

Esempi

1) In regime di capitalizzazione ad interessi composti, il tasso annuo di interesse equivalente al tasso trimestrale del 1.47 % è?

$$i = (1 + i_4)^4 -1 = (1 + 0{,}0147)^4 -1 = 0{,}06011$$

approssimato alla quinta cifra decimale.

2) In capitalizzazione composta il tasso annuo equivalente a i_4 = 1.5 % è?(approssimare alla quinta cifra decimale)

$$i = (1 + 0{,}015)^4 -1 = 0{,}06136$$

Il tasso equivalente annuo in capitalizzazione semplice sarebbe 0.06. Come interpretare i decimali in più? Sono la misura degli interessi sugli interessi propria della capitalizzazione composta.

Il tasso periodale noto quello annuale è:

$$i_k = (1 + i)^{1/k} -1= \sqrt[k]{(1+i)} - 1$$

3) Il tasso trimestrale composto equivalente a quello annuale del 9 % è? (approssimare alla quarta cifra decimale)

$$i_4 = (1 + i)^{1/4} -1 = (1 + 0{,}09)^{1/4} -1 = 0{,}02178$$

L'equivalenza fra due tassi periodali è:

$$(1 + i_k)^k =(1 + i_s)^s$$

risolvendo si ha:

$$i_k = (1 + i_s)^{s/k} -1$$

4) Dato $i_4 = 0.03$ si trovi il tasso mensile (già svolto in capitalizzazione semplice)

$$i_{12} = (1 + i_4)^{4/12} -1 = 0.00990$$

Si osservi che il tasso mensile equivalente in capitalizzazione semplice è 1% mentre in capitalizzazione composta è minore, 0.990 % , ciò è la conseguenza delle ipotesi base dei due regime: in quella composta gli interesse produrranno altri interessi nei periodi successivi, al contrario nella capitalizzazione semplice gli interessi sono infruttiferi.

TASSO ANNUO NOMINALE CONVERTIBILE K VOLTE

Il tasso annuo nominale convertibile k volte, indicato J_k, si definisce come:

$$J_k = i_k \; k = [(1 + i)^{1/k} - 1] \, k$$

Non si trova nei calcoli. Ha il vantaggio di passare rapidamente al tasso effettivo periodale:

$$i_k = J_k / k$$

senza ricorrere alle radici k-esime. E' molto usato nella pratica, infatti nelle pubblicità del credito al consumo viene indicato in t.a.n. che viene convertito generalmente in tasso effettivo mensile per i pagamenti. Ovviamente, in capitalizzazione semplice J_k non si usa perché vale la relazione:

$$i = J_k.$$

Esempi

1) Si impiega il capitale di 15.000 euro ad interesse composto per 10 anni. Conviene un tasso annuo effettivo del 4,50 % o un tasso annuo nominale convertibile 3 volte J_3 = 4,50 % ?

Il tasso effettivo quadrimestrale corrispondente a J_3 è:

$$i_3 = J_3 / 3 = 0.045/3 = 0{,}015$$

il tasso unitario annuo è:

$$i = (1 + 0{,}015)^3 -1 = 0{,}045678373$$

ovviamente conviene applicare il tasso nominale convertibile J_3 = 4,50 % e non quello annuo. Alternativamente, si poteva rispondere al quesito calcolando i relativi montante:

per i = 4,50 % si ha :

$$M = C\ (1 + i)^t = 15.000\ (1 + 0,045)^{10} = 23.294,54\ €$$

per $J_3 = 4,50\ \%$, pari a $i_3 = 0,015$, si ha :

$$M' = C\ (1 + i_3)^{t\,3} = 15.000\ (1 + 0,015)^{30} = 23.446,20\ €$$

Confermando la scelta fatta con l'altro procedimento. Il risultato ha la seguente interpretazione: computando il tempo in quadrimestri ci saranno più capitalizzazioni e quindi più interessi su interessi. In effetti si poteva rispondere senza fare calcoli!!!